Les filtres analogiques passifs

I. INTRODUCTION

Les filtres analogiques passifs sont des éléments de base du traitement du signal très utilisés en électronique. Parmi leurs nombreuses applications, on peut citer la séparation d'un signal audio avant de l'appliquer à un haut-parleur des basses, à celui des médiums et à celui des aigus, la combinaison et la séparation ultérieure de plusieurs conversations téléphoniques sur un seul canal, la sélection d'une station de radio choisie dans un récepteur radio et le rejet des autres.

Un filtre est donc un circuit dont le comportement dépend de la fréquence des signaux. De ce fait, il doit donc contenir au moins un condensateur ou une bobine. On distingue les filtres :

- passe-bas (qui coupent les hautes fréquences),
- passe-haut (qui coupent les basses fréquences),
- passe-bande qui ne laissent passer qu'une bande définie (intervalle) de fréquence,
- coupe-bande

II. LES FONCTIONS DE TRANSFERT (FT)

1. Définitions générales

On peut représenter le filtre de la façon suivante :



$v_e(t) = V_E.\sqrt{2}sin\,(\omega t)$ donc $\underline{V_E} = V_E$

- V_E est constante : la valeur efficace du signal d'entrée est fixée quelle que soit la fréquence.
- L'argument est nul par définition : c'est la référence par rapport à laquelle on appréciera le déphasage du signal de sortie.

$v_S(t) = V_S.\sqrt{2}sin\,(\omega t + \varphi)$ donc $\underline{V_S} = V_S e^{j\varphi}$

- V_S n'est pas constante : la valeur efficace du signal de sortie dépend de la fréquence de $v_e(t)$ et pour être rigoureux on devrait la noter $V_S(\omega)$.
- L'argument dépend aussi de la fréquence de $v_e(t)$ et on devrait le noter $\varphi\,(\omega)$.

On définit alors la fonction de transfert (FT) $\underline{H}(\omega)$ du filtre de la façon suivante :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_e}}$$

soit en décomposant:

- $\left|\underline{H}(\omega)\right| = \frac{V_S}{V_e}$: le module de la FT correspond bien au rapport de la valeur efficace de la tension de sortie sur la valeur efficace de la tension d'entrée. C'est le gain et on peut la noter $G(\omega)$. C'est une grandeur sans dimension et forcément positive ou nulle.
- $\varphi(\omega) = Arg\,(\underline{H}(\omega)) = Arg\,(num) - Arg\,(dén) = \varphi - 0 = \varphi$: l'argument de la FT correspond bien au déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée.

  Il s'exprime en radians ou mieux en degrés (directement mesurable à l'oscilloscope) et il est positif si le signal de sortie est en avance par rapport au signal d'entrée et négatif dans le cas contraire.

Pour calculer la FT, on utilise les lois fondamentales (loi d'Ohm, de Kirchhoff, théorèmes de Thévenin ou de Norton, théorème de Millman, formule du pont diviseur en tension, etc. ...) en se souvenant que l'impédance complexe d'un condensateur s'écrit $1/jC\omega$ et celle d'une bobine$jL\omega$.

2. Etude du module (ou Gain $G(\omega)$)

a) Ordre du filtre

Quand on calcule la FT, on obtient un polynôme complexe ou un quotient de polynômes complexes où apparaissent des termes en ω, ω^2 … : l'ordre du filtre correspond au degré du polynôme, c'est à dire à l'exposant du terme de plus haut degré en ω. Nous nous limiterons à des filtres d'ordre 2.

Physiquement, l'ordre du filtre correspond au nombre de composants non résistifs (bobines ou condensateurs) du circuit.

b) Type de filtre

Le gain variant en fonction de la fréquence, l'étude de cette variation se mène comme l'étude classique d'une fonction $y = f(x)$, x étant la pulsation ω et y le gain : étude de la dérivée, recherche des extremums, sens de variation, valeurs particulières.

Selon le sens de variation, on peut avoir 4 **types** de filtres :

- $G(\omega)$ augmente quand f augmente : filtre passe-haut
- $G(\omega)$ diminue quand f augmente : filtre passe-bas
- $G(\omega)$ augmente puis diminue quand f augmente : filtre passe-bande (forcément d'ordre >1)
- $G(\omega)$ diminue puis augmente quand f augmente : filtre coupe-bande (forcément d'ordre >1)

Rem : pour des filtres du 1er ordre, $G(\omega)$ est forcément monotone (croissante ou décroissante).

c) Gain en décibel

Le gain en décibel d'un filtre $G_{dB}(\omega)$ est égal à 20 fois le **logarithme décimal** du gain : il s'exprime en décibels (symbole : dB).

On a donc $\boldsymbol{G_{dB}(\omega) = 20.log(G(\omega))}$ ou $\boldsymbol{20.log(|\underline{H}(\omega)|)}$

Rem 1 : la fonction "log" étant strictement monotone et croissante, le sens de la variation du Gain en décibel est évidemment le même que celui du gain.

Rem 2 : Le décibel est en réalité d'une fausse unité car $\underline{H}(\omega)$ n'a pas d'unité (on ne peut pas prendre le log d'une grandeur avec une unité).

Rem 3 : Pourquoi travailler avec $G_{dB}(\omega)$ plutôt qu'avec $G(\omega)$?

- *La fonction log atténue les variations d'une grandeur, on peut donc étudier à la fois, sur le même graphe, les faibles et les fortes valeurs de $G(\omega)$.*
- *Les yeux (capteurs naturels de l'intensité lumineuse) et les oreilles (capteurs naturels del'intensité acoustique) sont plus sensibles à une échelle logarithmique qu'à une échelle linéaire*

On cherchera la valeur du gain en décibel maximum ($G_{dB_{MAX}}$) qui est un paramètre important du filtre, ainsi que la fréquence pour laquelle on obtient ce gain en décibel maximum.

Si on trace sur papier semi-log les courbes du Gain en décibel en décibels et du déphasage, on obtient des graphiques appelés **Diagrammes de Bode**. Des exemples de tracés sont donnés en annexe.

Pour aller plus loin :

d) Fréquence d'accord (ou centrale)

*Pour un filtre passe-bande (ou coupe-bande) la fréquence pour laquelle le gain (en décibel) est maximum (ou minimum) s'appelle la **fréquence d'accord** ou centrale : c'est un des paramètres les plus importants qui caractérise un filtre.*

e) Fréquences de coupure

La fréquence de coupure est la fréquence pour laquelle le gain en décibel est inférieur de 3 dB par rapport au gain en décibel maximum ou, ce qui revient au même, c'est la fréquence pour laquelle le gain est égale au gain maximum divisée par racine de 2 (la 2ème définition est plus pratique pour les calculs).

On a donc : pour $f = f_C$, $G_{dB_C} = G_{dB_{MAX}} - 3\,dB$ ou $G_C = G_{MAX}/\sqrt{2}$ *(l'indice c veut dire coupure)*

Rem 1 : pour des filtres passe-bas ou passe-haut, il n'y a qu'une fréquence de coupure et pour des filtres passe-bande ou coupe-bande, il y en a deux qu'on appelle fréquence de coupure basse (f_{cB}) et fréquence de coupure haute ($f_{cH} > f_{cB}$).

Rem 2 : contrairement à l'idée contenue dans le mot coupure, il ne faut pas dire (ou croire ...) qu'au-delà de la fréquence de coupure, le signal ne passe plus : il est seulement de plus en plus atténué mais il ne disparaît pas brutalement.

f) Bande passante

C'est la plage de fréquence comprise entre les deux fréquences de coupure :

La largeur de la bande passante – pour les filtres passe-bande et coupe-bande - est égale à la différence $f_{cH} - f_{cB}$.

Rem : on mesure la sélectivité d'un filtre passe-bande ou coupe-bande par le rapport : fréquence centrale sur bande passante : plus ce rapport est grand, plus le filtre est sélectif.

g) Pente et ordre du filtre

On s'intéresse aussi à la "vitesse" à laquelle décroît le gain en décibel $G_{dB}(\omega)$ *quand on sort de la bande passante. Plus il décroît vite, plus le filtre atténue efficacement des signaux en dehors de la bande passante (qui est à priori la zone utile)*

Dans l'expression du gain en décibel, on fait donc tendre ω *vers 0 puis vers l'infini : on trace ses asymptotes. Ce sont des droites dans un repère semi-log et on peut calculer la pente.*

On exprime cette pente en décibels par décade (variation d'un facteur 10 de la fréquence).

Elle est liée à ***l'ordre*** *du filtre. Par exemple, pour les filtres passe-bas et passe-haut, on a :*

- *filtre du 1er ordre : pente de l'asymptote :* $\pm\ 20\ dB$ *par décade.*
- *filtre du 2ème ordre : pente de l'asymptote :* $\pm\ 40\ dB$ *par décade.*
- *filtre d'ordre* n *: pente de l'asymptote :* $\pm\ 20.n\ dB$ *par décade.*

La pente traduit donc l'efficacité avec laquelle le filtre atténue les signaux indésirables.

h) Tracé de la courbe de Gain en décibel

On peut tracer point par point la courbe du gain en décibel en fonction de la fréquence sur du papier millimétré semi-logarithmique : en effet, la pente du gain en décibel étant linéaire par rapport au log de la fréquence (quand f *est très loin de la bande passante), la courbe sera rectiligne dans cette partie du graphe.*

i) Etude de l'argument (ou Déphasage $\varphi(\omega)$ *)*

Le déphasage variant en fonction de la fréquence, l'étude de cette variation se mène comme celle du gain en décibel : étude de la dérivée, recherche des extremums, sens de variation, valeurs particulières.

Attention : il faut soigneusement étudier dans quel cadran du plan complexe se trouve le nombre complexe représentant la FT. En effet $Arg\ (\underline{H}(\omega)) = Arctan(b/a)$ *si* $\underline{H}(\omega) = a + jb$*, mais la calculatrice ramène toujours l'angle entre* $-\frac{\pi}{2}$ *et* $+\frac{\pi}{2}$*, c'est à dire qu'elle "voit"* $a > 0$.

La variation totale du déphasage est liée à l'ordre n *du filtre et vaut* $n.\frac{\pi}{2}$

III. Formes normalisées des fonctions de transfert des filtres d'ordre 1 et 2

Les fonctions de transfert des filtres d'ordre 1 et 2 dont l'gain tend vers 0 en dehors de la bande passante peuvent se mettre sous une forme particulière, appelée forme (ou écriture) normalisée (ou généralisée), qui dépend :

- de l'ordre du filtre
- de la nature du filtre

Le tableau ci-dessous vous donne toutes les fonctions de transfert normalisées dont vous pourriez avoir besoin !

Type de filtre	Ordre 1	Ordre 2
Passe-Bas	$\underline{H}(\omega) = G_{Max}.\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$ avec : $G_{Max} = G_{TBF}$ $\omega_c =$ Pulsation de coupure	$\underline{H}(\omega) = G_0.\frac{1}{1+2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0}-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ avec : $G_0 = G_{TBF}$
Passe-Haut	$\underline{H}(\omega) = G_{Max}.\frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$ avec : $G_{Max} = G_{THF}$ $\omega_c =$ Pulsation de coupure	$\underline{H}(\omega) = G_0.\frac{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1+2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0}-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ avec : $G_0 = G_{THF}$
Passe-Bande		$\underline{H}(\omega) = G_0.\frac{2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0}}{1+2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0}-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ avec : $G_0 = G_{Max}$

Rappel : TBF = Très basses fréquences $(f \to 0)$
THF = Très hautes fréquences $(f \to \infty)$

Mettre une fonction de transfert sous forme normalisée revient à déterminer les différents paramètres, c'est-à-dire :

- G_{Max} et ω_c pour les filtres du 1er ordre
- G_0, σ et ω_0 pour les filtres du 2ème ordre

Rq1 : Ces paramètres sont toujours des constantes, réelles positives ! Ils ne doivent donc pas contenir de ω, de j et de signe $-$.

Rq2 : Pour les filtres d'ordre 1, vous pouvez trouver ω_c de 2 façons différentes :

- Soit par normalisation de la fonction de transfert
- Soit en utilisant la définition $A(\omega_c) = \frac{A_{Max}}{\sqrt{2}}$

Rq3 : σ est le coefficient d'amortissement du circuit.

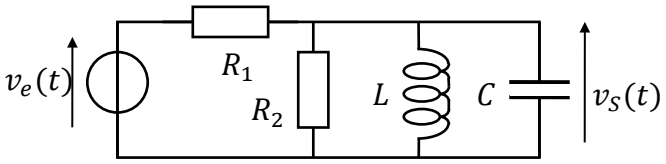
ω_0 est la pulsation propre du circuit.

Pour mettre une fonction de transfert d'un filtre sous sa forme généralisée, il faut toujours commencer par mettre le dénominateur sous la bonne forme. Vous remarquerez qu'il y a toujours un $'1'$ dans la partie réelle de ce dénominateur, c'est ce qu'il faut commencer par faire apparaître. Généralement, les autres termes du dénominateur ne poseront pas de problème.

Il faut ensuite travailler sur le numérateur, qui a – lui aussi – une forme particulière selon la nature du filtre. Vous remarquerez qu'il est toujours égal à l'un des membres du dénominateur.

Enfin, vous pourrez procéder par identification !

EXEMPLE :



Ce filtre est un filtre passe-bande ($A \to 0$ en TBF et en THF). Sa fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{jR_2L\omega}{R_1R_2 + j(R_1 + R_2)L\omega - R_1R_2LC\omega^2}$$

On commence par faire apparaître le 1 au dénominateur en mettant R_1R_2 en facteur.

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{R_1R_2} \times \frac{jR_2L\omega}{1 + j\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2}L\omega - LC\omega^2}$$

$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{R_1} \times \frac{jL\omega}{1 + j\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2}L\omega - LC\omega^2}$$

On remarque ensuite qu'on a bien la forme attendue au dénominateur. Comme il s'agit d'un filtre passe-bande, le numérateur doit être un imaginaire pur (ce qui est bien le cas ici) et numérateur et dénominateur doivent avoir la même partie imaginaire. On va donc faire apparaitre le $\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}$ manquant de la façon suivante :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{R_1} \times \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} \times \frac{\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2}.jL\omega}{1 + j\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2}L\omega - LC\omega^2}$$

$$\Rightarrow \underline{H}(\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times \frac{j\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} L\omega}{1 + j\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} L\omega - LC\omega^2}$$

On peut donc alors passer à l'identification :

$$\begin{cases} G_0 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \\ \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = LC\omega^2 \;\Rightarrow \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ 2\sigma\dfrac{\omega}{\omega_0} = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} L\omega \;\Rightarrow \sigma = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} L\omega_0 \end{cases}$$

IV. Synthèse : METHODOLOGIE D'ETUDE DES FILTRES

- Déterminer l'ordre du filtre : il correspond au nombre de composants non résistifs.
- Déterminer le type du filtre : il suffit d'imaginer que la fréquence du signal d'entrée tend vers 0 puis vers l'infini et de calculer l'amplitude du signal de sortie dans ces 2 cas.

  Pour cela on applique les règles suivantes :

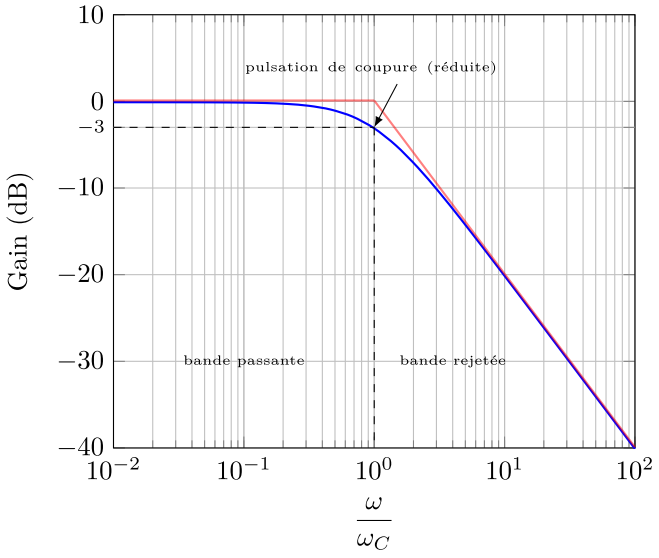
  - ✓ En très basses fréquences (TBF), $f \to 0 \Rightarrow |Z_C| \to \infty$: on remplace le condensateur par un interrupteur ouvert (on l'enlève !)
  - ✓ En très basses fréquences (TBF), $f \to 0 \Rightarrow |Z_L| \to 0$: on remplace la bobine par un fil
  - ✓ En très hautes fréquences (THF), $f \to \infty \Rightarrow |Z_C| \to 0$: on remplace le condensateur par un fil
  - ✓ En très hautes fréquences (THF), $f \to \infty \Rightarrow |Z_L| \to \infty$: on remplace la bobine par un interrupteur ouvert (on l'enlève !)

  Dans le montage, il ne reste que le générateur d'entrée et des résistances : le calcul de la tension de sortie s'effectue très simplement.
- Calculer la FT et la mettre sous forme normalisée.
- En déduire les relations entre les composants du filtre et ses paramètres (Gain en décibel maximum, fréquence(s) de coupure, Bande Passante, etc.…).

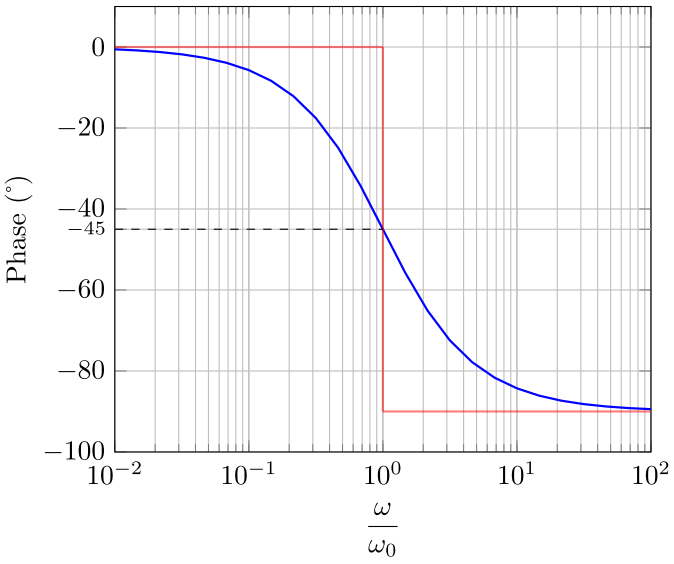
ANNEXES – Diagrammes de Bode

✓ Filtre Passe-Bas

- Courbe de gain

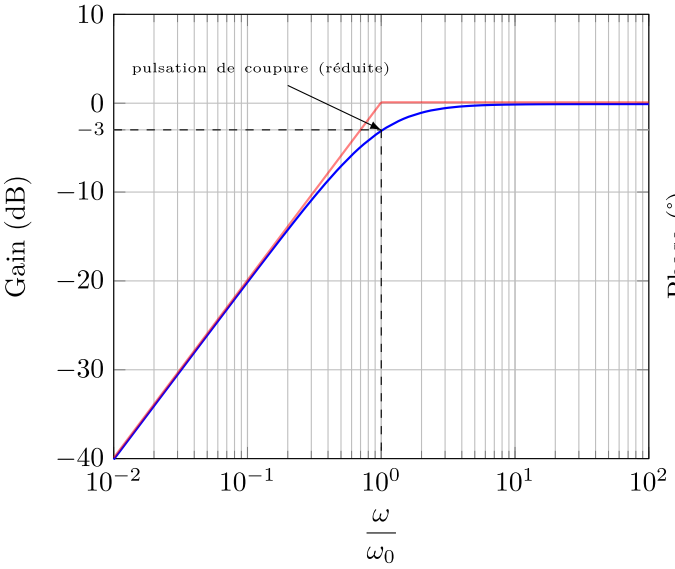


- Courbe de phase

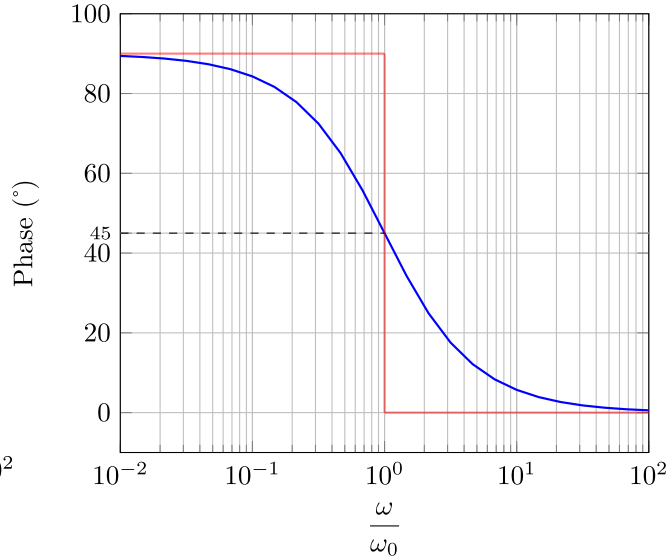


✓ Filtre Passe-Haut

- Courbe de gain

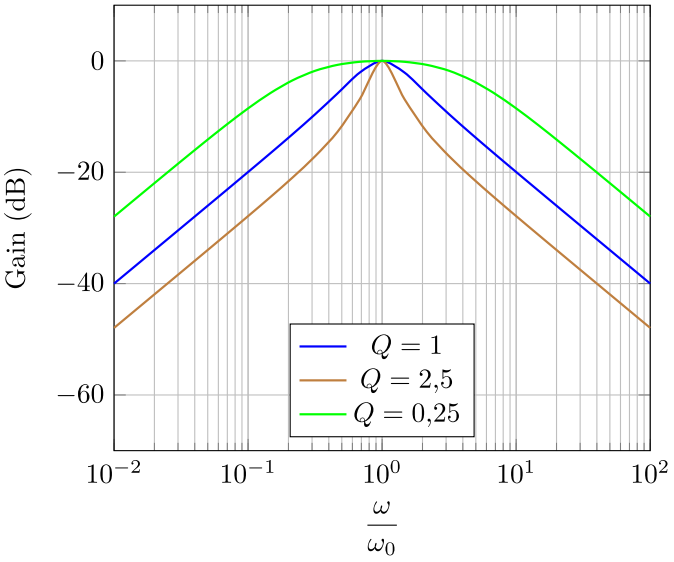


- Courbe de phase

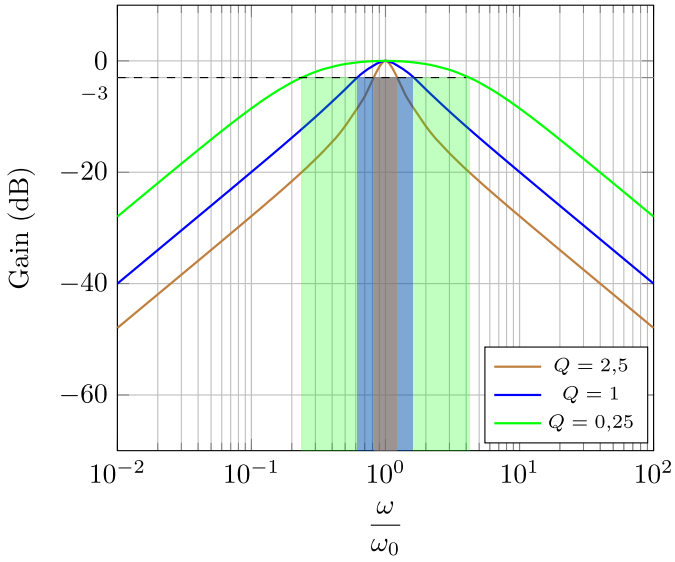


✓ Filtre Passe-Bande

- Courbe de gain



- Courbe de phase



Rq : $Q = 1/2\sigma$